1. Funciones matriciales. Matriz exponencial

1.1. Funciones vectoriales

Sea el cuerpo $I\!K$ que puede ser $\mathbb{C}$ ó $I\!R$ y sea $I \subset I\!R$ un intervalo. Entonces $\mathcal{C}^0(I, I\!K^n)$ designará al conjunto de todas las funciones definidas en I y con valores en $I\!K^n$ que sean continuas. O sea,

$$\mathcal{C}^0(I, I\!K^n) = \{X = (x_1, \ldots, x_n)^T : x_i : I \longrightarrow I\!K \text{ continua} \forall i, \ \ 1 \leq i \leq n\}.$$

$\mathcal{C}^1(I, I\!K^n)$ denotará al conjunto de todas las funciones vectoriales de I a $I\!K^n$ diferenciables con continuidad. Así,

$$\mathcal{C}^1(I, I\!K^n) = \{X = (x_1, \ldots, x_n)^T : \exists \ x_i' : I \longrightarrow I\!K \text{ continua } \forall i, \ 1 \leq i \leq n\}.$$

Es inmediato comprobar que estos conjuntos tienen estructura de espacio vectorial sobre el cuerpo $I\!K$ con las operaciones suma de funciones vectoriales, $(X + Y)(t) = X(t) + Y(t)$, y producto por escalares, $(\lambda X)(t) = \lambda X(t)$.

1.2. Funciones matriciales

Denotamos por $\mathcal{M}(n, I\!K)$ al espacio vectorial sobre $I\!K$ de dimensión n^2 de todas las matrices $n \times n$ de elementos de $I\!K$.

Consideramos una función

$$\begin{array}{rccl} A: & I\!R & \longrightarrow & \mathcal{M}(n, I\!K) \\ & t & \rightsquigarrow & A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} \end{array}$$

Diremos que $A(t)$ es **continua** en t_0 si todas las componentes $a_{ij}(t)$ son continuas en t_0. Si $A(t)$ es continua en cada punto $t \in I$ se dice que $A(t)$ es continua en I. Representaremos por $\mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, I\!K))$ al conjunto de todas las funciones de I a $\mathcal{M}(n, I\!K)$ continuas, esto es,

$$\mathcal{C}^0(I, \mathcal{M}(n, I\!K)) = \{A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} : \ a_{ij} : I \longrightarrow I\!K \text{ continua}, 1 \leq i, j \leq n\}$$

Diremos que $A(t)$ es **diferenciable en** t_0 si todas las componentes $a_{ij}(t)$ son derivables en t_0 y se define su derivada como la matriz

$$\frac{dA}{dt}(t_0) = A'(t_0) = (a_{ij}'(t_0))_{1 \leq i,j \leq n}.$$

Si $A(t)$ es diferenciable en cada $t \in I$ diremos que A es diferenciable en I. Representaremos por $\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}(n, I\!K))$ al conjunto de todas la aplicaciones de I a $\mathcal{M}(n, I\!K)$ diferenciables con continuidad. Así,

$$\mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}(n, I\!K)) = \{A(t) = (a_{ij}(t))_{1 \leq i,j \leq n} : \ \exists \ a_{ij}' : I \longrightarrow I\!K \text{ continua } \forall \ 1 \leq i, j \leq n\}.$$

Del mismo modo, diremos que $A(t)$ es **integrable** en un intervalo $(c, d) \subset I\!R$ si todas las componentes $a_{ij}(t)$ son integrables en (c, d) y se define la integral de $A(t)$ sobre (c, d) como la matriz

$$\int_c^d A(t)dt = \left(\int_c^d a_{ij}(t)dt \right)_{1 \leq i,j \leq n}.$$

LLamaremos **primitiva** de $A(t)$ a la matriz

$$\int A(t)dt = \left(\int a_{ij}(t)dt\right)_{1\leq i,j\leq n}.$$

Propiedades 1.1. *Sean* $A(t) = (a_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ *y* $B(t) = (b_{ij}(t))_{1\leq i,j\leq n}$ *diferenciables en un punto* t_0. *Entonces se verifica:*

(i) $(A+B)'(t_0) = A'(t_0) + B'(t_0)$.

(ii) $(\lambda A)'(t_0) = \lambda A'(t_0) \qquad \forall \lambda \in I\!K$.

(iii) $(AB)'(t_0) = A'(t_0)B(t_0) + A(t_0)B'(t_0)$.

(iv) $(PA)'(t_0) = PA'(t_0) \qquad \forall P \in \mathcal{M}(n, I\!K)$.

1.3. Norma de una matriz

En el espacio vectorial $\mathcal{M}(n, I\!K)$ de las matrices cuadradas $n \times n$ con coeficientes reales ($I\!K = I\!R$) o complejos ($I\!K = \mathbb{C}$) se define $\|\cdot\|_1 : \mathcal{M}(n, I\!K) \longrightarrow [0, \infty)$ que a cada matriz $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$, le hace corresponder la suma de los módulos de todos sus elementos, es decir,

$$\|A\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{1}$$

Se puede comprobar fácilmente que $\|\cdot\|_1$ cumple las propiedades de una norma:

Sean $A, B \in \mathcal{M}(n, I\!K)$ y $\lambda \in I\!K$.

1. $\|A\|_1 = 0$ si, y sólo si, $A = (0)$, donde (0) es la matriz idénticamente nula.

2. $\|\lambda A\|_1 = |\lambda|\|A\|_1$.

3. $\|A + B\|_1 \leq \|A\|_1 + \|B\|_1$.

Además, se verifica la siguiente propiedad:

4. $\|AB\|_1 \leq \|A\|_1\|B\|_1$.

En efecto, escribiendo $A = (a_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ y $B = (b_{ij})_{1\leq i,j\leq n}$ tenemos $AB = (\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj})_{1\leq i,j\leq n}$, así que

$$\|AB\|_1 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}\right| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\sum_{j=1}^{n}|b_{jk}| \leq \sum_{i=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}|a_{ik}|\|B\|_1 = \|A\|_1\|B\|_1.$$

Esta norma convierte al espacio $\mathcal{M}(n, I\!K)$ en un espacio vectorial normado. Así, se puede hablar de límite matricial estableciendo que una sucesión de matrices $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ converge a una matriz A si

$$\lim_{n\to\infty} \|A_n - A\|_1 = 0.$$

Puesto que se tiene

$$\|A\|_1 \leq n^2 \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$

y

$$\|A\|_1 \geq \max_{1\leq i,j\leq n} |a_{ij}|$$

resulta que la definición de convergencia matricial dada equivale a la convergencia componente a componente.

Lema 1.2. *Sea $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. Para todo $k \in \mathbb{N}$, se verifica*

$$\|A^k\|_1 \le \|A\|_1^k.$$

▷<u>Demostración</u>: Si aplicamos la propiedad **4.** de la norma uno tomando $B = A$, la desigualdad mostrada allí se convierte en

$$\|A^2\|_1 \le \|A\|_1^2.$$

Por inducción se sigue trivialmente que

$$\|A^k\|_1 \le \|A\|_1^k,$$

para todo $k \in \mathbb{N}$.◁

1.4. Función exponencial compleja de variable real

Dado $\lambda = a + ib \in \mathbb{C}$ se define la función exponencial compleja de variable real como

$$e^{\lambda t} = e^{at}(\cos bt + i \operatorname{sen} bt) \qquad \forall t \in \mathbb{R}$$

y tendremos que $\operatorname{Re}(e^{\lambda t}) = e^{at}\cos bt$ y $\operatorname{Im}(e^{\lambda t}) = e^{at}\operatorname{sen} bt$. De estas definiciones se obtienen fácilmente las siguientes propiedades.

Propiedades

Sean $\lambda = a + ib$, λ_1, $\lambda_2 \in \mathbb{C}$ y $(c, d) \subset \mathbb{R}$, se verifica:

(i) $e^{\lambda_1 t}e^{\lambda_2 t} = e^{(\lambda_1+\lambda_2)t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$. En particular, $e^{\lambda t}e^{-\lambda t} = 1$.

(ii) $\frac{d}{dx}\left(e^{\lambda t}\right) = \lambda e^{\lambda t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$.

(iii) Si $\lambda \neq 0$, entonces una primitiva de $e^{\lambda t}$ es la función $\frac{1}{\lambda}e^{\lambda t}$ para todo $t \in \mathbb{R}$ y $\displaystyle\int_c^d e^{\lambda t}dt = \frac{1}{\lambda}e^{\lambda(d-c)}$.

(iv) $|e^{\lambda t}| = e^{at}$ para todo $t \in \mathbb{R}$, donde la notación $|\cdot|$ representa el módulo de un número complejo.

1.5. Matriz exponencial

Denotaremos por I_n la matriz identidad en el espacio $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$ y, por convenio, $A^0 = I_n$.

Proposición 1.3. *Dada $A \in \mathcal{M}(n, \mathbb{K})$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ o $\mathbb{C}$, la serie matricial*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}A^k$$

es convergente en el espacio $\mathcal{M}(n, \mathbb{K})$. A su suma, que denotaremos por e^A, le llamaremos **matriz exponencial**.

$\triangleright$Demostración: Teniendo en cuenta que $\mathcal{M}(n, I\!K)$ es un espacio vectorial normado de dimensión finita, esto es, $\mathcal{M}(n, I\!K)$ es un espacio de Banach, para probar la convergencia de la serie es suficiente con ver que la sucesión de las sumas parciales $\{S_N\}_{N=1}^{\infty}$, donde $S_N = \sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!} A^k$, es de Cauchy en $\mathcal{M}(n, I\!K)$ con la norma uno definida por (1). Se trata pues de probar que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k_\varepsilon \in I\!N$ tal que

$$\|S_{N+M} - S_N\|_1 < \varepsilon, \qquad \forall N \geq k_\varepsilon.$$

Aplicando el lema 1.2 se obtiene que

$$\|S_{N+M} - S_N\|_1 = \left\| \sum_{k=N+1}^{N+M} \frac{1}{k!} A^k \right\| \leq \sum_{k=N+1}^{N+M} \frac{1}{k!} \|A^k\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{N+M} \frac{1}{k!} \|A\|_1^k.$$

Ahora como se tiene

$$\lim_{k \uparrow \infty} \sum_{k=N+1}^{N+M} \frac{1}{k!} \parallel A \parallel_1^k = 0,$$

puesto que la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} \parallel A \parallel_1^k$ es convergente en $I\!R$ a $e^{\|A\|_1}$, se sigue que para todo $\varepsilon > 0$ existe un $k_\varepsilon \in I\!N$ tal que

$$\|S_{N+M} - S_N\|_1 \leq \sum_{k=N+1}^{N+M} \frac{1}{k!} \parallel A \parallel_1^k < \varepsilon, \quad \forall N \geq k_\varepsilon.$$

Por lo tanto, $\{S_N\}_{N \geq 1}$ es una sucesión de Cauchy en $\mathcal{M}(n, I\!K)$.$\triangleleft$

Observación: La matriz exponencial satisface

$$\|e^A\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A^k\|_1 \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \|A\|_1^k \leq e^{\|A\|_1}$$

y, en consecuencia, la serie e^A es absolutamente convergente.

Propiedades 1.4. *Sean $A, B \in \mathcal{M}(n, I\!K)$, se verifica:*

(i) $e^{(0)} = I_n$.

(ii) $e^{cI_n} = e^c I_n$ *para todo* $c \in I\!K$.

(iii) *Si* $AB = BA$ *entonces* $e^{A+B} = e^A e^B$.

(iv) e^A *es siempre inversible y su inversa es* e^{-A}.

(v) $e^{PAP^{-1}} = Pe^A P^{-1}$ *para toda* $P \in \mathcal{M}(n, I\!K)$ *inversible.*

$\triangleright$Demostración: Las propiedades **(i)** y **(ii)** se verifican trivialmente. Probemos **(iii)**. Puesto que A y B conmutan y dado que las series e^A y e^B son absolutamente convergentes son válidas las siguientes identidades

$$\begin{aligned} e^A e^B &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k \right) \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} B^k \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{i+j=k} \frac{1}{i!j!} A^i B^j \right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \left(\sum_{i+j=k} \begin{pmatrix} k \\ i \end{pmatrix} A^i B^j \right) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (A+B)^k = e^{A+B} \end{aligned}$$

(iv) Aplicando la propiedad anterior resulta

$$e^A e^{-A} = e^{(0)} = I_n$$

con lo que se tiene

$$(e^A)^{-1} = e^{-A}.$$

Por tanto, la matriz e^A es siempre inversible.

(v) Observemos que se cumple $(PAP^{-1})^k = PA^kP^{-1}$, luego

$$e^{PAP^{-1}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!}(PAP^{-1})^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} PA^K P^{-1} = P\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} A^k\right) P^{-1} = Pe^A P^{-1},$$

lo que concluye la demostración de las propiedades.◁

En general, si A es una matriz $n \times n$ **diagonal** con los coeficientes $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ en su diagonal principal, $A = \text{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, entonces $A^k = \text{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k)$ para todo $k = 0, 1, 2, \ldots$. Por consiguiente e^A es una matriz diagonal dada por

$$e^A = \text{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_1^k}{k!}, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda_n^k}{k!}\right) = \text{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

1.6. Función matriz exponencial

Si A es una función matricial definida sobre I podemos definir mediante la exponencial la siguiente aplicación:

$$\begin{array}{rcl} e^{A(\cdot)}: \ I & \longrightarrow & \mathcal{M}(n, \mathbb{K}) \\ t & \rightsquigarrow & e^{A(t)} = \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(A(t))^k}{k!} \end{array}$$

A esta aplicación le llamaremos **función exponencial matricial**.

Teorema 1.5. *Sea $A \in \mathcal{C}^1(I, \mathcal{M}(n, \mathbb{R}))$ tal que $A(t)A'(t) = A'(t)A(t)$, entonces $e^{A(t)}$ es diferenciable en I y $\frac{d}{dt}e^{A(t)} = A'(t)e^{A(t)}$.*

▷<u>Demostración</u>: Observemos en primer lugar que $((A(t))^k)' = k(A(t))^{k-1}A'(t)$ como se puede demostrar fácilmente por inducción teniendo en cuenta la fórmula de derivación para el producto de matrices y usando la hipótesis de que $A(t)$ commuta con $A'(t)$. Así , se tiene que

$$S_N' = \left(\sum_{k=0}^{N} \frac{1}{k!}(A(t))^k\right)' = \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} k (A(t))^{k-1} A'(t) = A'(t) S_{N-1}.$$

Entonces,

$$\lim_{N \longrightarrow \infty} S_N' = \lim_{N \longrightarrow \infty} (A'(t) S_{N-1}) = A'(t) e^{A(t)}.$$

Por el teorema de convergencia de series se tiene que $(\lim_{N\longrightarrow\infty} S_N)' = \lim_{N\longrightarrow\infty} S_N'$ y, en consecuencia, $(e^{A(t)})' = A'(t)e^{A(t)}$ como queriamos probar.◁